KILKA PODSTAWOWYCH WIADOMOŚCI

Potęgi, które mają w wykładniku liczbę naturalną możemy przedstawić w formie:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \ldots \ldots \cdot a}$$

n- razy

a- podstawa potęgi

n- wykładnik potęgi

Mamy działanie 2·2·2. Czy można te działanie przedstawić w formie potęgi?

Tak! To jest właśnie klasyczny przykład, w którym mnożenie liczb możemy zapisać w formie potęgi. W powyższym działaniu mnożymy przez siebie „trzy dwójki", co w formie potęgi możemy zapisać następująco:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$$

Kiedy podnosimy jakąś liczbę do potęgi drugiej $(np. 3^2, 21^2$)to mówimy potocznie, że jest to kwadrat danej liczby, albo że liczba została podniesiona do kwadratu. Zwrot „Cztery do kwadratu" jest wiec równy 4^2.

Kiedy podnosimy jakąś liczbę do potęgi trzeciej $(np. 4^3, 2^3)$to mówimy potocznie, że jest to sześcian danej liczby, albo że liczba została podniesiona do sześcianu. Zwrot „Siedem do sześcianu" jest wiec równy7^3.

UWAGA!

Szczególnymi przypadkami są liczby podnoszone do potęgi „0" i „1". Każda liczba różna od zera podniesiona do potęgi zerowej jest równa 1. Każda liczba podniesiona do potęgi pierwszej nie zmienia swojej wartości.

$$\boldsymbol{a^0 = 1}$$

$$5^0 = 1$$

$$\boldsymbol{a^1 = a}$$

$$3^1 = 3$$

UWAGA!

Czasami może się zdarzyć, że wykładnik potęgi nie jest liczbą naturalną (np. chcielibyśmy podnieść liczbę do potęgi ujemnej). Wtedy musimy skorzystać z następującego wzoru:

$$\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1^n}{a}}$$

$$np. 5^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$$

MNOŻENIE I DZIELENIE POTĘG

Mnożenie potęg o tych samych podstawach:

$$\boldsymbol{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$$

Dzielenie potęg o tych samych podstawach:

$$\boldsymbol{a^n \div a^m = a^{n-m}}$$

$$4^5 \div 4^3 = 4^{5-3} = 4^2$$

lub

$$\boldsymbol{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$$

$$\frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2$$

Mnożenie potęg o tym samym wykładniku:

$$\boldsymbol{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$$

$$6^3 \cdot 4^3 = (6 \cdot 4)^3 = 24^3$$

Dzielenie potęg o tym samym wykładniku:

$$\boldsymbol{a^n : b^n = (a : b)^n}$$

$$8^4 : 2^4 = (8 : 2)^4 = 4^4 = 256$$

lub

$$\boldsymbol{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$$

$$\frac{15^3}{5^3} = \left(\frac{15}{3}\right)^3$$

Potęga podniesiona do potęgi:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$(3^2)^5 = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10}$$

DODAWANIE I ODEJMOWANIE POTĘG

Dodawanie potęg (podobnie jak odejmowanie) przysparza bardzo wielu problemów, więc spróbujmy wyjaśnić sobie wszelkie wątpliwości jakie mogą się nam przytrafić przy wykonywaniu tych działań.

Problem z dodawaniem potęg bierze się przede wszystkim z tego, że nie mamy żadnego wzoru czy też zasady, która dotyczyłaby tej operacji matematycznej.

Spójrz na poniższy przykład:

Przykład 1. Jak obliczyć działanie $6^2 + 6^2$?

Skoro w matematyce sumę $4 + 4$ możemy zapisać w postaci $4 + 4 = 2 \cdot 4$,to analogicznie sumę $6^2 \cdot 6^2$ możemy zapisać w postaci $6^2 + 6^2 = 2 \cdot 6^2$

W tym momencie tak naprawdę można już powiedzieć, że wykonaliśmy poprawnie dodawanie dwóch potęg. Możemy jeszcze w miarę możliwości policzyć dokładny wynik takiego działania, choć zazwyczaj nie jest to konieczne (a czasem nawet nie jest wskazane).

Przykład 2. Spróbujmy teraz dodać do siebie $2 \cdot 6^2 + 6^2$. Jak się do tego zabierzemy? Dokładnie tak samo, jak robiliśmy to powyżej:

Skoro np. $2 \cdot 4 + 4 = 3 \cdot 4$ to $2 \cdot 6^2 + 6^2 = 3 \cdot 6^2$

I tutaj podobnie jak to miało miejsce w przykładzie pierwszym – często powyższy zapis będzie wystarczający (zwłaszcza jak wymagany będzie od nas wynik w postaci potęgi).

Podobnie jak dodawanie będziemy wykonywali odejmowanie potęg:

Przykład 3. Oblicz: $4 \cdot 6^2 - 6^2$

Skoro np. $4 \cdot 3 - 3 = 3 \cdot 3 = 9$ **to** $4 \cdot 6^2 - 6^2 = 3 \cdot 6^2$

INNE PRZYKŁADY

Przykład 4. Zapisz w postaci potęgi liczby 2 sumę $2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3$.

Skoro np. $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3$ **to:**

$$2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3 = 4 \cdot 2^3$$

Ale to nie koniec, bo możemy ten końcowy zapis jeszcze uprościć, zamieniając liczbę 4 na 2^2**, co pozwoli nam wykonać mnożenie potęg, spójrz:**

$$4 \cdot 2^3 = 2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$$

Przykład 5. Zapisz w jak najprostszej postaci wynik działania: $5 \cdot 3^{100} - 2 \cdot 3^{100}$.

Obliczamy różnicę:

$$5 \cdot 3^{100} - 2 \cdot 3^{100} = 3 \cdot 3^{100}$$

Zamieniamy 3 na zapis 3^1**, czyli:**

$$3 \cdot 3^{100} = 3^1 \cdot 3^{100}$$

Wykonujemy mnożenie potęg o tej samej podstawie:

$$3^1 \cdot 3^{100} = 3^{1+100} = 3^{101}$$

Może się nam też przytrafić zadanie, w którym musimy dodać lub odjąć od siebie liczby, który mają identyczną podstawę potęgi, a różny wykładnik. Jak sobie z tym poradzić?

Przykład 6: Oblicz $11^{32} - 11^{30}$.

Gdybyśmy mieli tutaj mnożenie lub dzielenie, to sprawa byłaby bardzo prosta, bo dodalibyśmy lub odjęlibyśmy wykładnik potęgi. Ale co zrobić kiedy mamy odejmowanie (lub dodawanie)? Najlepszym wyjściem byłoby wyciągnięcie jednej z potęg przed nawias i zamienienie tego odejmowania na mnożenie:

$$11^{32} - 11^{30} = 11^{30}(11^2 - 1)$$

Ewentualnie można jeszcze obliczyć wartość w nawiasie i całość zapisać już jako:

$$11^{32} - 11^{30} = 11^{30}(11^2 - 1) = 11^{30} \cdot 120$$

Pamiętaj! Dodawanie i odejmowanie potęg nie jest proste i bardzo często wymaga przeanalizowania konkretnego przykładu w którym się pojawia. Staraj się dążyć do upraszczania zapisów, wyłączania liczb przed nawias i ewentualnego skracania poszczególnych wartości.

UWAGA!

Nie myl dodawania i odejmowania potęg z mnożeniem i dzieleniem!

$$13^6 + 13^6 = 2 \cdot 13^6$$

$$13^6 \cdot 13^6 = 13^{6+6} = 13^{12}$$

Przykład 7 Zapisz w postaci pojedynczej potęgi iloczyn $11^6 \cdot 27^2$.

Ani podstawy potęg nie są jednakowe, ani wykładniki nie są sobie równe. Liczby 11 na pewno nie uda nam się sensownie rozpisać w postaci potęgi, za to 27 możemy zapisać jako 3^3. Otrzymamy wtedy taką oto sytuację:

$$11^6 \cdot 27^2 = 11^6 \cdot (3^3)^2 = 11^6 \cdot 3^6$$

Tym razem otrzymaliśmy potęgi o jednakowych wykładnikach, zatem:

$$11^6 \cdot 3^6 = (11 \cdot 3)^6 = 33^6$$